E4 - Atomphysik Übungsblatt No. 9

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 28. Juni

Für E4-P-ler freiwillig...

9.1 Elektronenkonfigurationen im Termschema (*)

Bestimmen Sie die möglichen Terme für folgende Elektronenkonfigurationen und ordnen Sie diese in der Reihenfolge wachsender Energie mithilfe der Hundschen Regeln:

(a) $nd\ n'd$.

(b) $ns\ n'p\ n''d$.

9.2 Zeeman-Aufspaltung von Spektrallinien (*)

Das Spektrum des Cadmium-Atoms zeigt unter anderem Übergänge im roten ($\lambda_{rot} = 643,8$ nm) und blauen ($\lambda_{blau} = 480,0$ nm) Spektralbereich. An diesen Übergängen sind nur die beiden Außenelektronen beteiligt.

(a) Der rote Übergang verbindet die Singlett-Zustände 5^1D_2 und 5^1P_1. In einem schwachen homogenen Magnetfeld wird entlang der Magnetfeldachse eine Aufspaltung der roten Linie in zwei Komponenten beobachtet. Was erwarten Sie bei Beobachtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung zu sehen? Wie ändert sich das Verhalten bei starken Magnetfeldern?

(b) Die blaue Linie spaltet bei longitudinaler Beobachtung in vier Komponenten auf, die gegenüber der Zentralfrequenz um $\pm\frac{3}{2}\mu_B\,|B|$ und $\pm 2\mu_B\,|B|$ verschoben sind. Bestimmen Sie daraus die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Beachten Sie dazu auch die Auswahlregeln für optische Dipolstrahlung! Skizzieren Sie die Aufspaltung bei transversaler Beobachtung und geben Sie die Polarisation der jeweiligen Komponenten an.

9.3 Zeeman-Effekt im Grundzustand des Wasserstoffatoms (*)

Es soll die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms im Grundzustand berechnet werden, wenn ein äußeres magnetisches Feld angelegt wird. Dabei wollen wir über den normalen linearen Zeeman-Effekt hinausgehen und betrachten, wie sich die Energieniveaus für schwache und hohe Felder verschieben. Dazu betrachten wir zunächst den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms für die Hyperfeinstruktur in einem äußeren B-Feld ($a \approx h \cdot 1420$ MHz):

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] - \vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \tag{1}$$

Da das magnetische Moment ($\vec{\mu}_e = g_e\mu_0\vec{S}/\hbar, g_e \approx 2$) des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($L = 0$) nur durch dessen Spin verursacht wird, erhalten wir:

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] + \frac{2\mu_0 B\hat{S}_z}{\hbar} \tag{2}$$

Die Eigenenergien dieses Hamiltonoperators geben die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom bei beliebigen B-Feldern an (Breit-Rabi-Formel).

(a) Berechnen Sie zunächst den Hamiltonoperator in Matrizenform in der Basis der Hyperfeinzustände! Die vier Basiszustände im Grundzustand des Wasserstoffatoms lassen sich dabei in der ungekoppelten Basis aus Spin- und Kernspin-Drehimpulszuständen schreiben als:

$$|F = 1, m_F = 1\rangle = |+\rangle_S |+\rangle_I , \tag{3}$$

$$|F = 1, m_F = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S |-\rangle_I + |-\rangle_S |+\rangle_I), \tag{4}$$

$$|F = 1, m_F = -1\rangle = |-\rangle_S |-\rangle_I , \tag{5}$$

$$|F = 0, m_F = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S |-\rangle_I - |-\rangle_S |+\rangle_I). \tag{6}$$

Hierbei gibt der erste Anteil die Spinwellenfunktion und der zweite Anteil die Kernspinwellenfunktion an.

(b) Bestimmen Sie nun die vier Eigenwerte der Matrix und damit die Eigenenergien gemäß der Schrödingergleichung!

(c) Zeichnen / plotten Sie die Werte der vier Eigenenergien in Abhängigkeit vom Magnetfeld B bis zu mehreren kG!

(d) Bestimmen Sie näherungsweise die Eigenenergien für sehr kleine ($<$ 100 G) und sehr große ($>$ 1500 G) Magnetfelder. Welche Quantenzahlen („gute Quantenzahlen“) beschreiben jeweils das System in diesen beiden Regimes ?

9.4 Messung elektrischer Felder mittels Stark-Verschiebung (*)

Nehmen Sie an, dass die Stärke eines elektrischen Feldes durch die Bestimmung der quadratischen Stark-Verschiebung eines atomaren Energieniveaus gemessen wird. Nehmen Sie für die letzten beiden Teilaufgaben weiterhin an, dass die Stark-Verschiebung ΔE mit einer absoluten Genauigkeit $\delta\Delta E$, die unabhängig vom Betrag des Feldes ist, gemessen werden kann und für eine Feldstärke von $\varepsilon = 10$ kV/cm

$$\frac{\delta\Delta E}{|\Delta E|} = 10^{-4} \tag{7}$$

beträgt.

(a) Skizzieren Sie ein mögliches Experiment zur Messung der Auswirkung von elektrischen Feldern auf Atome mithilfe von optischer Spektroskopie.

(b) Diskutieren Sie welche Faktoren die Messgenauigkeit, die dabei erzielt werden kann, beeinflussen.

(c) Wie groß ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung von ε für eine Feldstärke von $\varepsilon \approx 10$ kV/cm bzw. $\varepsilon \approx 1$ MV/cm?

(d) Wie groß ist das kleinste Feld ε^*, das mit dieser Empfindlichkeit $\delta\Delta E$ für Stark-Verschiebungen gemessen werden kann? Warum ist es viel größer als die Ungenauigkeit bei der Bestimmung eines größeren Feldes?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Stark-Verschiebung gegeben ist durch $\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$.

E4 - Atomphysik Übungsblatt No. 9

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 28. Juni

Für E4-P-ler freiwillig...

9.1 Elektronenkonfigurationen im Termschema (*)

Bestimmen Sie die möglichen Terme für folgende Elektronenkonfigurationen und ordnen Sie diese in der Reihenfolge wachsender Energie mithilfe der Hundschen Regeln:
(a) $nd\ n'd$.
(b) $ns\ n'p\ n''d$.

9.2 Zeeman-Aufspaltung von Spektrallinien (*)

Das Spektrum des Cadmium-Atoms zeigt unter anderem Übergänge im roten ($\lambda_{rot} = 643,8$ nm) und blauen ($\lambda_{blau} = 480,0$ nm) Spektralbereich. An diesen Übergängen sind nur die beiden Außenelektronen beteiligt.

(a) Der rote Übergang verbindet die Singlett-Zustände 5^1D_2 und 5^1P_1. In einem schwachen homogenen Magnetfeld wird entlang der Magnetfeldachse eine Aufspaltung der roten Linie in zwei Komponenten beobachtet. Was erwarten Sie bei Beobachtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung zu sehen? Wie ändert sich das Verhalten bei starken Magnetfeldern?

(b) Die blaue Linie spaltet bei longitudinaler Beobachtung in vier Komponenten auf, die gegenüber der Zentralfrequenz um $\pm\frac{3}{2}\mu_B\,|B|$ und $\pm 2\mu_B\,|B|$ verschoben sind. Bestimmen Sie daraus die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Beachten Sie dazu auch die Auswahlregeln für optische Dipolstrahlung! Skizzieren Sie die Aufspaltung bei transversaler Beobachtung und geben Sie die Polarisation der jeweiligen Komponenten an.

9.3 Zeeman-Effekt im Grundzustand des Wasserstoffatoms (*)

Es soll die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms im Grundzustand berechnet werden, wenn ein äußeres magnetisches Feld angelegt wird. Dabei wollen wir über den normalen linearen Zeeman-Effekt hinausgehen und betrachten, wie sich die Energieniveaus für schwache und hohe Felder verschieben. Dazu betrachten wir zunächst den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms für die Hyperfeinstruktur in einem äußeren B-Feld ($a \approx h \cdot 1420$ MHz):

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] - \vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \tag{1}$$

Da das magnetische Moment ($\vec{\mu}_e = g_e\mu_0\vec{S}/\hbar, g_e \approx 2$) des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($L = 0$) nur durch dessen Spin verursacht wird, erhalten wir:

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] + \frac{2\mu_0 B\hat{S}_z}{\hbar} \tag{2}$$

Die Eigenenergien dieses Hamiltonoperators geben die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom bei beliebigen B-Feldern an (Breit-Rabi-Formel).

(a) Berechnen Sie zunächst den Hamiltonoperator in Matrizenform in der Basis der Hyperfeinzustände! Die vier Basiszustände im Grundzustand des Wasserstoffatoms lassen sich dabei in der ungekoppelten Basis aus Spin- und Kernspin-Drehimpulszuständen schreiben als:

$$\begin{aligned}
|F=1, m_F=1\rangle &= |+\rangle_S\,|+\rangle_I\,, && (3)\\
|F=1, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I + |-\rangle_S\,|+\rangle_I), && (4)\\
|F=1, m_F=-1\rangle &= |-\rangle_S\,|-\rangle_I\,, && (5)\\
|F=0, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I - |-\rangle_S\,|+\rangle_I). && (6)
\end{aligned}$$

Hierbei gibt der erste Anteil die Spinwellenfunktion und der zweite Anteil die Kernspinwellenfunktion an.

(b) Bestimmen Sie nun die vier Eigenwerte der Matrix und damit die Eigenenergien gemäß der Schrödingergleichung!

(c) Zeichnen / plotten Sie die Werte der vier Eigenenergien in Abhängigkeit vom Magnetfeld B bis zu mehreren kG!

(d) Bestimmen Sie näherungsweise die Eigenenergien für sehr kleine (< 100 G) und sehr große (> 1500 G) Magnetfelder. Welche Quantenzahlen („gute Quantenzahlen“) beschreiben jeweils das System in diesen beiden Regimes ?

9.4 Messung elektrischer Felder mittels Stark-Verschiebung (*)

Nehmen Sie an, dass die Stärke eines elektrischen Feldes durch die Bestimmung der quadratischen Stark-Verschiebung eines atomaren Energieniveaus gemessen wird. Nehmen Sie für die letzten beiden Teilaufgaben weiterhin an, dass die Stark-Verschiebung ΔE mit einer absoluten Genauigkeit $\delta\Delta E$, die unabhängig vom Betrag des Feldes ist, gemessen werden kann und für eine Feldstärke von $\varepsilon = 10$ kV/cm

$$\frac{\delta\Delta E}{|\Delta E|} = 10^{-4} \qquad (7)$$

beträgt.

(a) Skizzieren Sie ein mögliches Experiment zur Messung der Auswirkung von elektrischen Feldern auf Atome mithilfe von optischer Spektroskopie.

(b) Diskutieren Sie welche Faktoren die Messgenauigkeit, die dabei erzielt werden kann, beeinflussen.

(c) Wie groß ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung von ε für eine Feldstärke von $\varepsilon \approx 10$ kV/cm bzw. $\varepsilon \approx 1$ MV/cm?

(d) Wie groß ist das kleinste Feld ε^*, das mit dieser Empfindlichkeit $\delta\Delta E$ für Stark-Verschiebungen gemessen werden kann? Warum ist es viel größer als die Ungenauigkeit bei der Bestimmung eines größeren Feldes?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Stark-Verschiebung gegeben ist durch $\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$.

E4 - Atomphysik Übungsblatt No. 9

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 28. Juni

Für E4-P-ler freiwillig...

9.1 Elektronenkonfigurationen im Termschema (*)

Bestimmen Sie die möglichen Terme für folgende Elektronenkonfigurationen und ordnen Sie diese in der Reihenfolge wachsender Energie mithilfe der Hundschen Regeln:

(a) $nd\ n'd$.

(b) $ns\ n'p\ n''d$.

9.2 Zeeman-Aufspaltung von Spektrallinien (*)

Das Spektrum des Cadmium-Atoms zeigt unter anderem Übergänge im roten ($\lambda_{rot} = 643,8$ nm) und blauen ($\lambda_{blau} = 480,0$ nm) Spektralbereich. An diesen Übergängen sind nur die beiden Außenelektronen beteiligt.

(a) Der rote Übergang verbindet die Singlett-Zustände 5^1D_2 und 5^1P_1. In einem schwachen homogenen Magnetfeld wird entlang der Magnetfeldachse eine Aufspaltung der roten Linie in zwei Komponenten beobachtet. Was erwarten Sie bei Beobachtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung zu sehen? Wie ändert sich das Verhalten bei starken Magnetfeldern?

(b) Die blaue Linie spaltet bei longitudinaler Beobachtung in vier Komponenten auf, die gegenüber der Zentralfrequenz um $\pm\frac{3}{2}\mu_B\,|B|$ und $\pm 2\mu_B\,|B|$ verschoben sind. Bestimmen Sie daraus die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Beachten Sie dazu auch die Auswahlregeln für optische Dipolstrahlung! Skizzieren Sie die Aufspaltung bei transversaler Beobachtung und geben Sie die Polarisation der jeweiligen Komponenten an.

9.3 Zeeman-Effekt im Grundzustand des Wasserstoffatoms (*)

Es soll die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms im Grundzustand berechnet werden, wenn ein äußeres magnetisches Feld angelegt wird. Dabei wollen wir über den normalen linearen Zeeman-Effekt hinausgehen und betrachten, wie sich die Energieniveaus für schwache und hohe Felder verschieben. Dazu betrachten wir zunächst den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms für die Hyperfeinstruktur in einem äußeren B-Feld ($a \approx h \cdot 1420$ MHz):

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] - \vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \tag{1}$$

Da das magnetische Moment ($\vec{\mu}_e = g_e\mu_0\vec{S}/\hbar, g_e \approx 2$) des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($L = 0$) nur durch dessen Spin verursacht wird, erhalten wir:

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] + \frac{2\mu_0 B\hat{S}_z}{\hbar} \tag{2}$$

Die Eigenenergien dieses Hamiltonoperators geben die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom bei beliebigen B-Feldern an (Breit-Rabi-Formel).

(a) Berechnen Sie zunächst den Hamiltonoperator in Matrizenform in der Basis der Hyperfeinzustände! Die vier Basiszustände im Grundzustand des Wasserstoffatoms lassen sich dabei in der ungekoppelten Basis aus Spin- und Kernspin-Drehimpulszuständen schreiben als:

$$\begin{aligned}
|F=1, m_F=1\rangle &= |+\rangle_S\,|+\rangle_I\,, &(3)\\
|F=1, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I + |-\rangle_S\,|+\rangle_I), &(4)\\
|F=1, m_F=-1\rangle &= |-\rangle_S\,|-\rangle_I\,, &(5)\\
|F=0, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I - |-\rangle_S\,|+\rangle_I). &(6)
\end{aligned}$$

Hierbei gibt der erste Anteil die Spinwellenfunktion und der zweite Anteil die Kernspinwellenfunktion an.

(b) Bestimmen Sie nun die vier Eigenwerte der Matrix und damit die Eigenenergien gemäß der Schrödingergleichung!

(c) Zeichnen / plotten Sie die Werte der vier Eigenenergien in Abhängigkeit vom Magnetfeld B bis zu mehreren kG!

(d) Bestimmen Sie näherungsweise die Eigenenergien für sehr kleine (< 100 G) und sehr große (> 1500 G) Magnetfelder. Welche Quantenzahlen („gute Quantenzahlen") beschreiben jeweils das System in diesen beiden Regimes ?

9.4 Messung elektrischer Felder mittels Stark-Verschiebung (*)

Nehmen Sie an, dass die Stärke eines elektrischen Feldes durch die Bestimmung der quadratischen Stark-Verschiebung eines atomaren Energieniveaus gemessen wird. Nehmen Sie für die letzten beiden Teilaufgaben weiterhin an, dass die Stark-Verschiebung ΔE mit einer absoluten Genauigkeit $\delta\Delta E$, die unabhängig vom Betrag des Feldes ist, gemessen werden kann und für eine Feldstärke von $\varepsilon = 10$ kV/cm

$$\frac{\delta\Delta E}{|\Delta E|} = 10^{-4} \tag{7}$$

beträgt.

(a) Skizzieren Sie ein mögliches Experiment zur Messung der Auswirkung von elektrischen Feldern auf Atome mithilfe von optischer Spektroskopie.

(b) Diskutieren Sie welche Faktoren die Messgenauigkeit, die dabei erzielt werden kann, beeinflussen.

(c) Wie groß ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung von ε für eine Feldstärke von $\varepsilon \approx 10$ kV/cm bzw. $\varepsilon \approx 1$ MV/cm?

(d) Wie groß ist das kleinste Feld ε^*, das mit dieser Empfindlichkeit $\delta\Delta E$ für Stark-Verschiebungen gemessen werden kann? Warum ist es viel größer als die Ungenauigkeit bei der Bestimmung eines größeren Feldes?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Stark-Verschiebung gegeben ist durch $\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$.

E4 - Atomphysik Übungsblatt No. 9

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 28. Juni

Für E4-P-ler freiwillig...

9.1 Elektronenkonfigurationen im Termschema (*)

Bestimmen Sie die möglichen Terme für folgende Elektronenkonfigurationen und ordnen Sie diese in der Reihenfolge wachsender Energie mithilfe der Hundschen Regeln:
(a) $nd\ n'd$.
(b) $ns\ n'p\ n''d$.

9.2 Zeeman-Aufspaltung von Spektrallinien (*)

Das Spektrum des Cadmium-Atoms zeigt unter anderem Übergänge im roten ($\lambda_{rot} = 643,8$ nm) und blauen ($\lambda_{blau} = 480,0$ nm) Spektralbereich. An diesen Übergängen sind nur die beiden Außenelektronen beteiligt.

(a) Der rote Übergang verbindet die Singlett-Zustände 5^1D_2 und 5^1P_1. In einem schwachen homogenen Magnetfeld wird entlang der Magnetfeldachse eine Aufspaltung der roten Linie in zwei Komponenten beobachtet. Was erwarten Sie bei Beobachtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung zu sehen? Wie ändert sich das Verhalten bei starken Magnetfeldern?

(b) Die blaue Linie spaltet bei longitudinaler Beobachtung in vier Komponenten auf, die gegenüber der Zentralfrequenz um $\pm\frac{3}{2}\mu_B\,|B|$ und $\pm 2\mu_B\,|B|$ verschoben sind. Bestimmen Sie daraus die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Beachten Sie dazu auch die Auswahlregeln für optische Dipolstrahlung! Skizzieren Sie die Aufspaltung bei transversaler Beobachtung und geben Sie die Polarisation der jeweiligen Komponenten an.

9.3 Zeeman-Effekt im Grundzustand des Wasserstoffatoms (*)

Es soll die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms im Grundzustand berechnet werden, wenn ein äußeres magnetisches Feld angelegt wird. Dabei wollen wir über den normalen linearen Zeeman-Effekt hinausgehen und betrachten, wie sich die Energieniveaus für schwache und hohe Felder verschieben. Dazu betrachten wir zunächst den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms für die Hyperfeinstruktur in einem äußeren B-Feld ($a \approx h \cdot 1420$ MHz):

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] - \vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \tag{1}$$

Da das magnetische Moment ($\vec{\mu}_e = g_e\mu_0\vec{S}/\hbar, g_e \approx 2$) des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($L = 0$) nur durch dessen Spin verursacht wird, erhalten wir:

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] + \frac{2\mu_0 B\hat{S}_z}{\hbar} \tag{2}$$

Die Eigenenergien dieses Hamiltonoperators geben die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom bei beliebigen B-Feldern an (Breit-Rabi-Formel).

(a) Berechnen Sie zunächst den Hamiltonoperator in Matrizenform in der Basis der Hyperfeinzustände! Die vier Basiszustände im Grundzustand des Wasserstoffatoms lassen sich dabei in der ungekoppelten Basis aus Spin- und Kernspin-Drehimpulszuständen schreiben als:

$$|F=1, m_F=1\rangle = |+\rangle_S |+\rangle_I , \tag{3}$$

$$|F=1, m_F=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S |-\rangle_I + |-\rangle_S |+\rangle_I), \tag{4}$$

$$|F=1, m_F=-1\rangle = |-\rangle_S |-\rangle_I , \tag{5}$$

$$|F=0, m_F=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S |-\rangle_I - |-\rangle_S |+\rangle_I). \tag{6}$$

Hierbei gibt der erste Anteil die Spinwellenfunktion und der zweite Anteil die Kernspinwellenfunktion an.

(b) Bestimmen Sie nun die vier Eigenwerte der Matrix und damit die Eigenenergien gemäß der Schrödingergleichung!

(c) Zeichnen / plotten Sie die Werte der vier Eigenenergien in Abhängigkeit vom Magnetfeld B bis zu mehreren kG!

(d) Bestimmen Sie näherungsweise die Eigenenergien für sehr kleine ($<$ 100 G) und sehr große ($>$ 1500 G) Magnetfelder. Welche Quantenzahlen („gute Quantenzahlen“) beschreiben jeweils das System in diesen beiden Regimes ?

9.4 Messung elektrischer Felder mittels Stark-Verschiebung (*)

Nehmen Sie an, dass die Stärke eines elektrischen Feldes durch die Bestimmung der quadratischen Stark-Verschiebung eines atomaren Energieniveaus gemessen wird. Nehmen Sie für die letzten beiden Teilaufgaben weiterhin an, dass die Stark-Verschiebung ΔE mit einer absoluten Genauigkeit $\delta\Delta E$, die unabhängig vom Betrag des Feldes ist, gemessen werden kann und für eine Feldstärke von $\varepsilon = 10$ kV/cm

$$\frac{\delta\Delta E}{|\Delta E|} = 10^{-4} \tag{7}$$

beträgt.

(a) Skizzieren Sie ein mögliches Experiment zur Messung der Auswirkung von elektrischen Feldern auf Atome mithilfe von optischer Spektroskopie.

(b) Diskutieren Sie welche Faktoren die Messgenauigkeit, die dabei erzielt werden kann, beeinflussen.

(c) Wie groß ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung von ε für eine Feldstärke von $\varepsilon \approx 10$ kV/cm bzw. $\varepsilon \approx 1$ MV/cm?

(d) Wie groß ist das kleinste Feld ε^*, das mit dieser Empfindlichkeit $\delta\Delta E$ für Stark-Verschiebungen gemessen werden kann? Warum ist es viel größer als die Ungenauigkeit bei der Bestimmung eines größeren Feldes?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Stark-Verschiebung gegeben ist durch $\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$.

E4 - Atomphysik Übungsblatt No. 9

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 28. Juni

Für E4-P-ler freiwillig...

9.1 Elektronenkonfigurationen im Termschema (*)

Bestimmen Sie die möglichen Terme für folgende Elektronenkonfigurationen und ordnen Sie diese in der Reihenfolge wachsender Energie mithilfe der Hundschen Regeln:
(a) $nd\ n'd$.
(b) $ns\ n'p\ n''d$.

9.2 Zeeman-Aufspaltung von Spektrallinien (*)

Das Spektrum des Cadmium-Atoms zeigt unter anderem Übergänge im roten ($\lambda_{rot} = 643,8$ nm) und blauen ($\lambda_{blau} = 480,0$ nm) Spektralbereich. An diesen Übergängen sind nur die beiden Außenelektronen beteiligt.

(a) Der rote Übergang verbindet die Singlett-Zustände 5^1D_2 und 5^1P_1. In einem schwachen homogenen Magnetfeld wird entlang der Magnetfeldachse eine Aufspaltung der roten Linie in zwei Komponenten beobachtet. Was erwarten Sie bei Beobachtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung zu sehen? Wie ändert sich das Verhalten bei starken Magnetfeldern?

(b) Die blaue Linie spaltet bei longitudinaler Beobachtung in vier Komponenten auf, die gegenüber der Zentralfrequenz um $\pm\frac{3}{2}\mu_B\,|B|$ und $\pm 2\mu_B\,|B|$ verschoben sind. Bestimmen Sie daraus die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Zustände. Beachten Sie dazu auch die Auswahlregeln für optische Dipolstrahlung! Skizzieren Sie die Aufspaltung bei transversaler Beobachtung und geben Sie die Polarisation der jeweiligen Komponenten an.

9.3 Zeeman-Effekt im Grundzustand des Wasserstoffatoms (*)

Es soll die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms im Grundzustand berechnet werden, wenn ein äußeres magnetisches Feld angelegt wird. Dabei wollen wir über den normalen linearen Zeeman-Effekt hinausgehen und betrachten, wie sich die Energieniveaus für schwache und hohe Felder verschieben. Dazu betrachten wir zunächst den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms für die Hyperfeinstruktur in einem äußeren B-Feld ($a \approx h \cdot 1420$ MHz):

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] - \vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \tag{1}$$

Da das magnetische Moment ($\vec{\mu}_e = g_e\mu_0\vec{S}/\hbar, g_e \approx 2$) des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($L = 0$) nur durch dessen Spin verursacht wird, erhalten wir:

$$H = H_{hfs} + H_B = \frac{a}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] + \frac{2\mu_0 B\hat{S}_z}{\hbar} \tag{2}$$

Die Eigenenergien dieses Hamiltonoperators geben die Lage der Energieniveaus im Wasserstoffatom bei beliebigen B-Feldern an (Breit-Rabi-Formel).

(a) Berechnen Sie zunächst den Hamiltonoperator in Matrizenform in der Basis der Hyperfeinzustände! Die vier Basiszustände im Grundzustand des Wasserstoffatoms lassen sich dabei in der ungekoppelten Basis aus Spin- und Kernspin-Drehimpulszuständen schreiben als:

$$\begin{aligned}
|F=1, m_F=1\rangle &= |+\rangle_S\,|+\rangle_I\,, && (3)\\
|F=1, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I + |-\rangle_S\,|+\rangle_I), && (4)\\
|F=1, m_F=-1\rangle &= |-\rangle_S\,|-\rangle_I\,, && (5)\\
|F=0, m_F=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_S\,|-\rangle_I - |-\rangle_S\,|+\rangle_I). && (6)
\end{aligned}$$

Hierbei gibt der erste Anteil die Spinwellenfunktion und der zweite Anteil die Kernspinwellenfunktion an.

(b) Bestimmen Sie nun die vier Eigenwerte der Matrix und damit die Eigenenergien gemäß der Schrödingergleichung!

(c) Zeichnen / plotten Sie die Werte der vier Eigenenergien in Abhängigkeit vom Magnetfeld B bis zu mehreren kG!

(d) Bestimmen Sie näherungsweise die Eigenenergien für sehr kleine (< 100 G) und sehr große (> 1500 G) Magnetfelder. Welche Quantenzahlen („gute Quantenzahlen") beschreiben jeweils das System in diesen beiden Regimes ?

9.4 Messung elektrischer Felder mittels Stark-Verschiebung (*)

Nehmen Sie an, dass die Stärke eines elektrischen Feldes durch die Bestimmung der quadratischen Stark-Verschiebung eines atomaren Energieniveaus gemessen wird. Nehmen Sie für die letzten beiden Teilaufgaben weiterhin an, dass die Stark-Verschiebung ΔE mit einer absoluten Genauigkeit $\delta\Delta E$, die unabhängig vom Betrag des Feldes ist, gemessen werden kann und für eine Feldstärke von $\varepsilon = 10$ kV/cm

$$\frac{\delta\Delta E}{|\Delta E|} = 10^{-4} \qquad (7)$$

beträgt.

(a) Skizzieren Sie ein mögliches Experiment zur Messung der Auswirkung von elektrischen Feldern auf Atome mithilfe von optischer Spektroskopie.

(b) Diskutieren Sie welche Faktoren die Messgenauigkeit, die dabei erzielt werden kann, beeinflussen.

(c) Wie groß ist die Ungenauigkeit in der Bestimmung von ε für eine Feldstärke von $\varepsilon \approx 10$ kV/cm bzw. $\varepsilon \approx 1$ MV/cm?

(d) Wie groß ist das kleinste Feld ε^*, das mit dieser Empfindlichkeit $\delta\Delta E$ für Stark-Verschiebungen gemessen werden kann? Warum ist es viel größer als die Ungenauigkeit bei der Bestimmung eines größeren Feldes?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Stark-Verschiebung gegeben ist durch $\Delta E = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$.