E4 - Atomphysik
Übungsblatt No. 7

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 14. Juni

Hinweis: Bitte schreiben Sie unbedingt Ihre Übungsgruppennummer und Ihren Namen auf Ihre Ausarbeitung.

7.1 Ramsey-Interferometer

In der Vorlesung wurde die Ramsey-Methode zur Messung der Frequenz von atomaren Übergängen eingeführt.

(a) Skizzieren Sie schematisch die einzelnen Schritte der Ramsey-Methode anhand der Blochkugel.

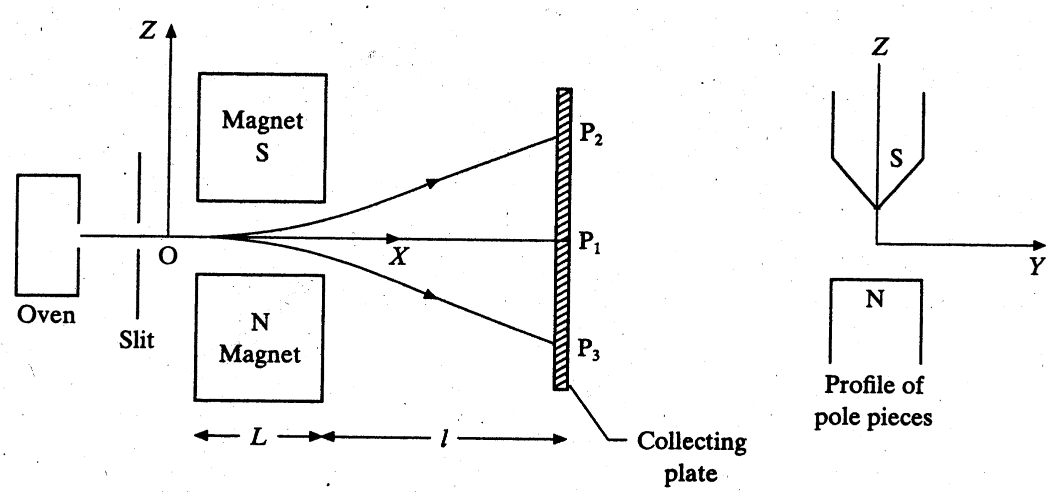
(b) Wodurch wird die Auflösung bei der Ramsey-Methode bestimmt?

(c) Versuchen Sie die Analogien zwischen der Ramsey-Methode und einem Mach-Zehnder Interferometer in der Optik aufzuzeigen. Welche Komponente im Interferometer entspricht welchem Teil der Ramsey-Sequenz?

7.2 Stern-Gerlach Experiment (*)

Wir betrachten eine Stern-Gerlach-Apparatur für Silberatome (siehe Abbildung) mit folgenden Daten: Ofentemperatur $T = 600K$, Länge des Magneten $L = 0.1$ m, Abstand vom Magneten zum Detektor $l = 1$ m, Feldgradient $\partial B_z/\partial z = 10^3$ T m^{-1}.

Hinweise: Gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeit der Silberatome $(3k_BT/M)^{1/2}$ *ist, wobei* k_B *die Boltzmannkonstante und* M *die Masse eines Silberatoms ist. Die Projektion des magnetischen Moments auf die Magnetfeldachse kann für Silber die Werte* $\mu_z = \pm\mu_B$ *annehmen, wobei* μ_B *das Bohrschen Magneton ist.*



(a) Berechnen Sie den Abstand der Auftreffpunkte P_2, P_3 auf dem Schirm.

(b) Bei der Verwendung von Silberatomen spaltet der Atomstrahl in zwei Komponenten auf, d.h. das magnetische Moment des Atoms kann zwei diskrete Werte annehmen. Welche Bedeutung hat diese Beobachtung für die quantenmechanische Beschreibung?

7.3 Wiederholung zur Drehimpulsalgebra

Es seien J_x, J_y und J_z drei Operatoren, die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \qquad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \qquad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \tag{1}$$

Wir definieren den Operator $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ sowie die „Leiteroperatoren“ $J_+ = J_x + iJ_y$ und $J_- = J_x - iJ_y$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{J}^2$ mit jeder der Komponenten von $\mathbf{J}$ vertauscht, also $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0$.

(b) Zeigen Sie $[J_z, J_+] = \hbar J_+$, $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$, sowie $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

(c) Wir können also eine Basis finden, in der zugleich $\mathbf{J}^2$ und z.B. J_z diagonal sind. Die zugehörigen Basisvektoren nennen wir $|j, m_j\rangle_z$. Es gilt $\mathbf{J}^2 |j, m_j\rangle_z = j(j+1)\hbar^2 |j, m_j\rangle_z$ mit $j \in \mathbb{N}$ sowie $J_z |j, m_j\rangle_z = m_j\hbar |j, m_j\rangle_z$ mit $-j \leq m_j \leq j$.
Beweisen Sie, dass $J_+ |j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor von J_z zum Eigenwert m_j+1, sowie dass $J_- |j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor zum Eigenwert $m_j - 1$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Kommutatorrelationen aus Teil (b).

(d) Berechnen Sie weiter die Produkte J_+J_- und J_-J_+ und erhalten Sie daraus eine Formel für $\mathbf{J}^2$, die nur J_-, J_+ und J_z enthält.

7.4 Drehimpulskopplung

Gegeben sei ein quantenmechanisches System aus zwei Drehimpulsen $\vec{L}$, $\vec{S}$ die zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ gekoppelt sind. Geben Sie für die beiden Fälle $L = 3$, $S = 1/2$ und $L = 1$, $S = 1$ die möglichen Gesamtdrehimpulse an.

(a) Zeigen Sie durch Abzählen, dass die Zahl der Basiszustände in beiden Basen ($|L, S, m_L, m_S\rangle$ bzw. $|L, S, J, m_J\rangle$) durch $N = (2L+1)(2S+1)$ gegeben ist.

Hinweis: Beachten Sie die jeweils möglichen Werte für m_i.

(b) Wie in der Vorlesung gezeigt führen relativistische Effekte zu weitere Terme im Hamiltonoperator, von denen einer der wichtigsten proportional zum Erwartungswert $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle$ ist. Zeigen Sie, dass $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle$ in der gekoppelten Basis $|L, S, J, m_J\rangle$ diagonal ist.

Hinweis: Benutzen Sie $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} + \vec{S}^2$.