

E4 - Atomphysik

Übungsblatt No. 5

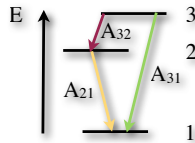
Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 31. Mai

Hinweis: Bitte schreiben Sie unbedingt Ihre Übungsgruppennummer und Ihren Namen auf Ihre Ausarbeitung.

5.1 Spontane und Stimulierte Emission

- Schätzen Sie das Verhältnis von spontaner zu stimulierter Emission in einem Gas ab, das bei 1000 K im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung ist (incl. dem Strahlungsfeld). Die Atome in dem Gas seien durch ein Zwei-Niveau-System modelliert dessen höheres Niveau 2 eV über dem tieferen liegt.
- Nun sei das Strahlungsfeld gegeben durch eine künstliche Lichtquelle die schmalbandig bei der Übergangsfrequenz ω_{12} des obigen Zweiniveausystems emittiert. Die besetzung des unteren und oberen Niveaus seien N_1 und N_2 . Wie viel Lichtleistungsdichte (Intensität) $W(\omega_{12})$ wird benötigt um im Gleichgewicht eine Besetzungsinversion $N_2 > N_1$ zu erreichen?
- Man betrachte ein Dreiniveau-System wie im Bild mit Besetzungen $N_{1...3}$ und Einstein A-Koeffizienten A_{31} , A_{21} und A_{32} . Das System befinde sich anfänglich im Grundzustand. Nun werde Licht mit der Frequenz ω_{13} eingestrahlt. Stellen Sie die Ratengleichungen für die drei Zustände in diesem Fall auf. Was ist der Gleichgewichtszustand des Systems für den Fall dass A_{21} verschwindet und sonst kein Lichtfeld vorhanden ist? Was ist die Besetzung N_2 für nicht verschwindendes A_{21} ?



5.2 Spontane Emission im Wasserstoff

Ein Wasserstoffatom befinde sich zur Zeit $t = 0$ im ersten angeregten Zustand $\Psi_i(n = 2, l = 1, m_l = -1)$. Mit welcher mittleren Lebensdauer τ kehrt es unter Emission eines Photons in den Grundzustand Ψ_f zurück?

Hinweis: Berechnen Sie hierzu das Dipolmatrixelement des Übergangs $|\mathbf{d}_{if}|^2 = |(d_{if})_x|^2 + |(d_{if})_y|^2 + |(d_{if})_z|^2$. $\mathbf{d}_{if} = \langle \Psi_i | \hat{\mathbf{d}} | \Psi_f \rangle$

5.3 (*)Eigenschaften der Dichtematrix

Wie in der Vorlesung angegeben, ist die Dichtematrix eines statistischen Gemisches aus Zuständen $|\psi_n\rangle$ mit Wahrscheinlichkeiten p_n gegeben durch

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1)$$

wobei $|\psi_n\rangle$ beliebige Zustände sein können. Die p_n sind Wahrscheinlichkeiten sodaß $\sum_n p_n = 1$ gilt.

- Die Spur eines Operators ist $\text{tr} \hat{A} := \sum_k \langle k | \hat{A} | k \rangle$, wobei die Zustände $|k\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Zeigen Sie dass $\text{tr} \hat{\rho} = 1$.
- Zeigen sie, dass für einen reinen Zustand $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ gilt.
- Zeigen sie, dass die Umkehrung auch gilt.
Hinweis: Verwenden Sie daß $\hat{\rho}$ ein positiver hermitischer Operator mit Spur $\text{tr} \hat{\rho} = 1$ ist.
- Die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix heißen auch Kohärenzen. Da die Dichtematrix ein hermitischer Operator ist lässt sich immer eine Basis finden in der alle Kohärenzen verschwinden(!). Zeigen Sie dass in dem maximal gemischten Fall (alle möglichen orthogonalen Zustände sind gleich wahrscheinlich) keine Basis gibt in der das nicht so ist.
- Zeigen Sie, dass die kohärente Zeitentwicklung der Dichtematrix eines Systems mit Hamilton-Operator \hat{H} gegeben ist durch

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (2)$$

- Der Erwartungswert einer Observablen \hat{A} eines Systems im Zustand $\hat{\rho}$ kann man natürlicherweise schreiben als $\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum p_n \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_n \rangle$. Zeigen sie dass $\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} = \text{tr}(\hat{A} \hat{\rho})$

5.4 Dichtematrix am Zweiniveausystem

Ein Ensemble von Zwei-Niveau Atomen befindet sich mit 15% Wahrscheinlichkeit im Quantenzustand

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega_2 t} |2\rangle - e^{-i\omega_1 t} |1\rangle) \quad (3)$$

mit 25% Wahrscheinlichkeit im Quantenzustand

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} (e^{-i\omega_2 t} |2\rangle - 3e^{-i\omega_1 t} |1\rangle) \quad (4)$$

und mit 60% Wahrscheinlichkeit im Quantenzustand

$$\psi_3 = e^{-i\omega_2 t} |2\rangle. \quad (5)$$

Die Funktionen $|1\rangle, |2\rangle$ sind hierbei die stationären Eigenfunktionen des Zwei-Niveau Atoms und sollen als Basis für die folgenden Berechnungen verwendet werden.

- Berechnen Sie die Dichtematrix ρ für das gegebene System.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand $|\psi_1\rangle$ zu finden.
- Berechnen Sie ρ^2 . Was sagt das Ergebnis über das System aus?