E4 - Atomphysik
Übungsblatt No. 4

Prof. Immanuel Bloch

Sommersemester 2010
Abgabe Montag 24. Mai

Hinweis: Bitte schreiben Sie unbedingt Ihre Übungsgruppennummer und Ihren Namen auf Ihre Ausarbeitung.

4.1 Frequenzen messen mit π-Pulsen

Sie haben ja in der Vorlesung gehört was ein π-Puls ist: Ein Zweiniveausystem wird mit resonanter (oder beinahe resonanter) elektromagnetischer Strahlung bestrahlt bis genau eine halbe Rabioszillation verstrichen ist. Zu diesem Zeitpunkt ist die Anregungswahrscheinlichkeit maximal, bis zu 100%.

Auf diese Weise kann man nun auch umgekehrt die Frequenz eines optischen Übergangs bestimmen, um damit die Eigenschaften des Atoms zu messen. Angenommen wir kennen die Polarisierbarkeit d und die Stärke des elektrischen Feldes E_0 der Lichtstrahlung können wir nun π-Pulse mit verschiedenen Frequenzen erzeugen und damit das Atom untersuchen.

(a) In welchem Zustand ist ein Atom (anfänglich im Grundzustand) nach einem Puls der Länge T und einer Frequenz ω welche um den Betrag δ von der atomaren Resonanz verstimmt ist?

(b) Was ist die Länge des Pulses T_π welcher erzeugt werden muss um ohne Verstimmung einen π-Puls zu erreichen?

(c) Eine typische Messgröße ist der Anteil der Atome in einem bestimmten Zustand – hier z.B. der angeregte Zustand. Falls man die Länge des Pulses konstant bei T_π hält aber die Frequenz des Pulses variiert, welches Signal erhält man?

(d) Skizzieren Sie den Verlauf des Signals. Benutzen Sie als x-Achse die Verstimmung des Lichts, also die Differenz δ zwischen eingestrahltem Licht und der Atomaren Resonanz, und skizzieren sie in etwa einen Bereich von $\delta = -3\Omega_0..3\Omega_0$ (Ω_0 ist die unverstimmte Rabifrequenz).

(e) Diskutieren Sie nun wie genau sich aus der gemachten Messung nun die Frequenz des Übergangs bestimmen lässt: Welche Faktoren spielen dabei eine Rolle, was sind die Größenordnungen? Überlegen Sie sich zum Beispiel wie stark Änderungen der einzelnen Parameter entweder das Signal selbst oder dessen Empfindlichkeit beeinflussen.

(f) Wenn Sie nun statt eines π-Pulses einen „3π-Puls“ erzeugen, also einen Puls der Länge $3\times T_\pi$, wie ändert sich das Signal?

4.2 Wasserstoff-Grundzustand

Klassisch kann ein Teilchen in einem Potential bei Energieerhaltung nur Punkte erreichen für welche es ausreichende Gesamtenergie hat. Der Grundzustand des Elektrons im Wasserstoffatom hat die Energie $E_{1s} = -1Ry$

(a) Bestimmen Sie die Raumregion welche das Elektron klassisch nicht erreichen kann (in Einheiten von a_0)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der sich das Elektron im Gegensatz zum klassischen Fall eben doch in deser Region befindet

Bronstein sagt: $\int_r^\infty x^2 e^{-ax} dx = e^{-ar} \cdot \frac{2+ar(2+ar)}{a^3}$

4.3 Allgemeine Zustände

Ein Wasserstoffatom befindet sich im Zustand $\frac{1}{\sqrt{14}}(2\Psi_{100} - 3\Psi_{211} + \Psi_{322})$.

(a) Was ist der Erwartungswert der Energie?

(b) Was sind die Erwartungswerte der Drehimpulsoperatoren L_z und $\vec{L}^2$?

(c) Ist die Wellenfunktion ein Eigenzustand des Paritätsoperators?

4.4 Bohrs Bahnen *

Niels Bohr war ein schlauer Kerl, daher war seine Idee mit den Kreisbahnen nicht völlig falsch.

Manche Zustände des Wasserstoffatoms kommen solchen Bahnen tatsächlich nahe. Dies müssen natürlich Bahnen mit viel Drehmoment sein. Quantenmechanische Orbitale des Elektrons mit dem maximal möglichen Drehimpuls ($l = n - 1$) nennt man auch 'zirkulare Zustände'.

(a) Beweisen Sie, dass für grosse n bei zirkularen Zuständen gilt: Die mittlere (Root Mean Square) Abweichung des Elektron-Atom-Abstands von seinem Erwartungswert (Also die ,,Unschärfe" der Bahn) $\sqrt{<(r-<r>)^2>}$ geteilt durch den Erwartungswert des Abstandes geht mit $\approx 1/\sqrt{2n}$.

Tip: Genau wie bei der Fehlerrechnung (Berechnung der mittleren Abweichung von Messergebnissen): Formen sie den Ausdruck $<(r-<r>)^2>$ zunächst so um dass er nur die Erwartungswerte $<r>$ und $<r^2>$ enthält.

(b) Geben Sie den Bahnradius eines H-Atoms mit $n = 100$, $l = 99$ an sowie die Gröse der ,,Unschärfe" dieser Bahn.

(c) Das gegenseitige Gravitationspotential zweier Kugeln hat die gleiche r-Abhängigkeit wie das elektrische Potential. Folglich hat die Wellenfunktionen eines Teilchens in so einem Potential die gleiche Form. Vergleichen sie die Koeffizienten des Gravitationspotentials des Systems Erde-Mond mit dem des Systems Proton-Elektron und ermitteln sie die analoge Konstante zu a_0 im Erde-Mond-System.

($m_{Mond} = 7.349 \cdot 10^{22} kg$, $m_{Erde} = 5.974 \cdot 10^{24} kg$, mittlerer Abstand Erde-Mond: $348400 km$.

(d) Berechnen sie das n (und damit das l) der Umlaufbahn des Modes um die Erde unter der Annahme es handele sich um einen zirkularen Zustand. Wie gross ist die quantenmechanische Unschärfe der Mondbahn?

Es gilt (siehe Vorlesung):
$<r_{nlm}>= a_0 n^2(1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{l(l+1)}{n^2}))$ und $<r_{nlm}^2>= a_0^2 n^4(1 + \frac{3}{2}(1 - \frac{l(l+1)-1/3}{n^2}))$