E4 - Atomphysik
Übungsblatt No. 3

Prof. Immanuel Bloch

SOSE 2010
Abgabe Montag 17. Mai

Hinweis: Bitte schreiben Sie unbedingt Ihre Übungsgruppennummer und Ihren Namen auf Ihre Ausarbeitung.

3.1 Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms

(a) Berechnen Sie für den $1s$-Zustand des Wasserstoff-Atoms die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron in einem Abstand $r \leq a_0$ aufhält.

(b) Berechnen Sie die Knotenpunkte der Radialfunktion, die zum Zustand $n = 3$, $l = 0$ gehören, in Einheiten von a_0.

(c) Im thermischen Gleichgewicht sind alle zu einem Energieeigenwert gehörenden Zustände gleich besetzt. Zeigen Sie, daß die Summe der zum Energieeigenwert E_2 gehörigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons, $|\Psi_{2,l,m}(r,\theta,\phi)|^2$, dadurch kugelsymmetrisch wird.

3.2 Kinetische und potentielle Energie des H-Atoms

Berechnen Sie den Erwartungswert der potentiellen Energie V für den Grundzustand ($n = 1$) und den ersten angeregten Zustand ($n = 2$; $l = 0, 1$; $m = \pm l$) des Wasserstoffatoms. Berechnen Sie auch die kinetische Energie T.

Hinweis: Die Gesamtenergie ist $E = \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$.

3.3 Wasserstoffähnliche Ionen *

Wasserstoffähnliche Ionen sind Atome, die aus einem an einen Kern mit $Z > 1$ gebundenen Elektron bestehen. Aufgrund der größeren Kernladungszahl sind viele Aspekte ihres Niveauschemas stärker ausgeprägt als im Wasserstoffatom. Deshalb sind solche Ionen unter anderem für Experimente zur Überprüfung der Quantenelektrodynamik (QED), Messungen der Elektronenmasse oder zur Bestimmung der Feinstrukturkonstanten von Interesse.

Finden Sie die Skalierung folgender Erwartungswerte mit der Kernladungszahl Z eines Wasserstoffähnlichen Ions:

(a) $\langle r \rangle$, $\langle 1/r \rangle$ und $\langle 1/r^3 \rangle$, wobei r der Elektron-Kern-Abstand ist,

(b) potentielle Energie $\langle V \rangle$ und Gesamtenergie $\langle E \rangle$,

(c) sowie die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron am Ursprung zu finden, $|\Psi(r = 0)|^2$

Hinweis: Verwenden Sie keine explizite Form der Wellenfunktionen, sondern überlegen sie allgemein, durch welche Koordinatentransformation $r \to \rho(r, Z)$ *sie den Hamiltonoperator* H_Z *des wasserstoffähnlichen Ions auf den des Wasserstoffstoms* (H_1) *zurückführen können* $H_Z(r) \to f(Z) \times H_1(\rho)$.

Benötigte Wellenfunktionen:

- Radialwellenfunktionen:

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} \ \exp(-\frac{r}{a_0}) \tag{1}$$

$$R_{2,0}(r) = \frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \ \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp(-\frac{r}{2a_0}) \tag{2}$$

$$R_{3,0}(r) = \frac{2}{(3a_0)^{3/2}} \ \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) \exp(-\frac{r}{3a_0}) \tag{3}$$

- Vollständige Eingenfunktionen:

$$\psi_{2,0,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \ \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp(-\frac{r}{2a_0}) \tag{4}$$

$$\psi_{2,1,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \ \frac{r}{a_0} \ \exp(-\frac{r}{2a_0}) \ \cos(\theta) \tag{5}$$

$$\psi_{2,1,\pm1}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \ \frac{r}{a_0} \ \exp(-\frac{r}{2a_0}) \ \sin(\theta) \ e^{\pm i\phi} \tag{6}$$